

Diviseurs

1) Définitions :

Soient a et b, deux nombres entiers relatifs, b est non nul.

Le nombre **b est un diviseur du nombre a** s'il existe un nombre entier n tel que

$$b \times n = a$$

On dit aussi que **b divise a** ou que **a est un multiple de b**

Exemples :

3 est un diviseur de 72; en effet $3 \times 24 = 72$

24 est aussi un diviseur de 72

-8 est aussi un diviseur de 72 car $-8 \times (-9) = 72$

On dit qu'un nombre entier naturel est un **nombre premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.

Exemples :

3 et 31 sont des nombres premiers

4 n'est pas un nombre premier

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car son seul diviseur positif est 1.

2) PGCD :

Définition :

Parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers strictement positifs a et b, il en existe un qui est plus grand que tous les autres.

Le plus grand diviseur commun à a et b est noté PGCD (a;b)

Exemples :

Calculer le PGCD de 48 et 36 :

Les diviseurs de 48 sont : 1 2 3 4 6 8 12 16 24 48 }
 Les diviseurs de 36 sont : 1 2 3 4 6 9 12 18 36 } **Donc PGCD (48;36) = 12**

3) Recherche du PGCD par l'algorithme des différences successives

Propriété :

Soient a et b, deux nombres entiers relatifs alors $PGCD(a;b)=PGCD(b;a-b)$

Exemple: Calculer le PGCD de 378 et de 270

378	-	270	=	108
270	-	108	=	162
162	-	108	=	54
108	-	54	=	54
54	-	54	=	0

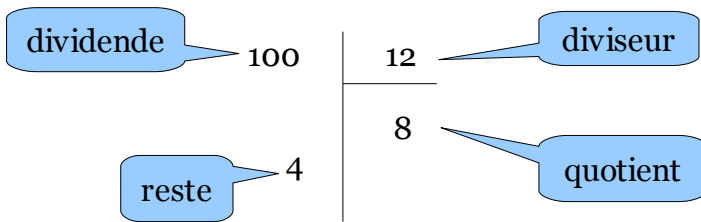
Donc $PGCD(378 ; 270) = PGCD(270 ; 108)$
 Donc $PGCD(270 ; 108) = PGCD(162 ; 108)$
 Donc $PGCD(162 ; 108) = PGCD(108 ; 54)$
 Donc $PGCD(108 ; 54) = PGCD(54 ; 54)$

Comme $PGCD(54;54)=54$

On trouve $PGCD (378;270) = 54$

4) Méthode d'Euclide

Division euclidienne : C'est une division entière par exemple $100 \div 12$



En notation euclidienne on écrit $100 = 8 \times 12 + 4$

Propriété : Le PGCD de deux nombres est égal au PGCD de l'un d'eux et au reste de leur division euclidienne.

Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide :

On effectue la division euclidienne entre le plus grand nombre et le plus petit. Ensuite, on renouvelle la division entre le plus petit nombre et le reste jusqu'à obtenir 0. Le PGCD est alors **le dernier reste non nul**.

Exemple : Calculer le PGCD de 378 et de 270

378	=	270	×	1	+	108
270	=	108	×	2	+	54
108	=	54	×	2	+	0

Le dernier reste non nul

On trouve $\text{PGCD}(378; 270) = 54$

5) Applications

A) Réduction de fractions

Vocabulaire : Une fraction irréductible est une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Propriété : Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de la simplifier par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{378}{270}$ pour la rendre irréductible

$$\frac{378}{270} = \frac{378 \div 54}{270 \div 54} = \frac{7}{5}$$

B) Problèmes de partage :

Un chocolatier a fabriqué 378 pralines et 270 chocolats.

Les colis sont constitués ainsi :

- Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
 - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
- Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?

b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

a. Le nombre maximal de colis qu'il pourra réaliser est le PGCD de 378 et 270 soit 54 colis

b. Comme $378 \div 54 = 7$, il y aura 7 pralines par colis et 5 chocolats ($270 \div 54 = 5$)