

Racines carrées

1) La notion

Définition : On nomme racine carrée d'un nombre positif a , un autre nombre positif dont le carré vaut a . Il se nomme racine carrée de a et se note \sqrt{a} .

Si $a \geq 0$ alors :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Vocabulaire : Le symbole $\sqrt{\quad}$ se nomme radical

Propriété : La racine carrée d'un nombre positif au carré vaut ce nombre

Si $a \geq 0$ alors :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Liste de carrés parfaits :

$$\begin{aligned}\sqrt{0} &= 0 \\ \sqrt{1} &= 1 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{9} &= 3 \\ \sqrt{16} &= 4 \\ \sqrt{25} &= 5 \\ \sqrt{36} &= 6 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ \sqrt{64} &= 8 \\ \sqrt{81} &= 9 \\ \sqrt{100} &= 10 \\ \sqrt{121} &= 11 \\ \sqrt{144} &= 12 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

2) Racines carrées et opérations

a) Produits

La racine carrée d'un produit (de nombre positifs) est égal au produit des racines carrées
Si a et b sont deux nombres positifs alors :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple : $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144} = 12$

b) Quotient

La racine carrée du quotient (de nombre positifs) est égal au quotient des racines carrées
Si a et b sont deux nombres positifs alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple : $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

c) Somme et différence

Il n'y a pas de relation particulière entre la racine carrée de la somme (la différence) de deux nombres positifs et la somme (la différence) de leur racine carrée.

Contre-exemples :

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$$

$$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3\neq\sqrt{25}+\sqrt{16}=5-4=1$$

Remarque : On peut néanmoins factoriser une expression dont les valeurs sous le radical sont les mêmes.

$$3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6\sqrt{5}=(3-2+6)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

3) Simplification du radical

On utilise la racine carrée des carrés parfaits et la règle de calcul des produits pour décomposer le nombre sous le radical

Exemple : $\sqrt{72}=\sqrt{9\times 8}=\sqrt{9}\times\sqrt{8}=3\sqrt{8}$

On cherche à obtenir le plus petit entier sous le radical : $3\sqrt{8}=3\sqrt{4}\times\sqrt{2}=3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Exercice type : Soit $A=5\sqrt{28}-6\sqrt{7}+\sqrt{175}$. Simplifier A sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier et b un entier naturel le plus petit possible.

$$A=5\sqrt{4\times 7}-6\sqrt{7}+\sqrt{25\times 7}$$

$$A=5\sqrt{4}\times\sqrt{7}-6\sqrt{7}+\sqrt{25}\times\sqrt{7}$$

$$A=(5\times 2-6+5)\sqrt{7}$$

$$A=9\sqrt{7}$$