Système d'équations

1) Un problème

Dans une papèterie, on a acheté 1 compas et 3 équerres au tarif de 6,50€. Dans le même commerce, on a acheté 2 compas et 5 équerres au tarif de 11,75€.

L'objectif du problème est de calculer le prix d'un compas et celui d'une équerre; pour cela, on va utiliser des équations.

Mise en place des inconnues : On note x le prix d'un compas et y celui d'une équerre.

Le premier achat se traduit par l'équation : $x + 3y = 6{,}50$
Le second se traduite par l'équation : $2x + 5y = 11{,}75$

Pour trouver la réponse au problème, on doit résoudre le système de deux équations (une pour chaque achat) à deux inconnues (le prix d'un compas et celui d'une équerre).

On note ce système : $\begin{cases} x + 3y = 6{,}50 \\ 2x + 5y = 11{,}75 \end{cases}$

2) Résolution par combinaison

Méthode :

- Si on ajoute les deux équations du système, l'égalité reste encore vrai; par exemple le prix de 3 compas et de 8 équerres est de 18€.
- On va donc chercher une combinaison de chacune des équations ayant le même coefficient par rapport à une des inconnues. En fait des coefficients opposés.

Application :

- Sur l'équation précédente, le coefficient de x est 1 sur le première équation est 2 sur la deuxième. On va multiplier par -2 la première équation.

Le système devient :

$$\begin{cases} -2\times x + (-2)\times 3y = -2\times 6{,}50 \\ 2x + 5y = 11{,}75 \end{cases}$$

Soit après calcul :

$$\begin{cases} -2x - 6y = -13 \\ 2x + 5y = 11{,}75 \end{cases}$$

En ajoutant les deux lignes l'astuce voit le jour et « les x vont disparaître ».
On obtient :

$$-2x + 2x - 6y + 5y = -13 + 11{,}75$$

soit $-y = -1{,}25$

d'où $y = 1{,}25$

- Maintenant, cherchons à « éliminer les y par le même méthode ».

$$\begin{cases} x + 3y = 6{,}50 \\ 2x + 5y = 11{,}75 \end{cases}$$

Les coefficients en y sont 3 et 5; comme on ne voit pas de lien entre 3 et 5, on va chercher à obtenir $3\times 5 = 15$
Multiplions la première ligne par -5 et la seconde par 3

$$\begin{cases} -5\times x + (-5)\times 3y = -5\times 6{,}50 \\ 3\times 2x + 3\times 5y = 3\times 11{,}75 \end{cases}$$

Soit après calcul :

$$\begin{aligned}-5x - 15y &= -32{,}50\\ 6x + 15y &= 35{,}25\end{aligned}$$

Si on ajoute les lignes, on trouve :

$$-5x + 6x - 15y + 15y = -32{,}50 + 35{,}25$$

Si on simplifie, on obtient :

$$x = 2{,}75$$

- Vérification : On a trouvé x=2,75 et y=1,25
  Testons la première équation : $x + 3y = 2{,}75 + 3\times1{,}25 = \underline{6{,}50}$
  Puis la seconde : $2x + 5y = 2\times 2{,}75 + 5\times1{,}25 = \underline{11{,}75}$ elles sont bien vérifiée.

- Conclusion : On a bien trouvé la solution du système; c'est le couple (2,75 ; 1,25)

3) Résolution par substitution

Méthode :

- On utilise cette méthode quand l'un des coefficient de l'une des inconnue vaut 1.
- On écrit donc une égalité de cette inconnue en fonction de l'autre puis on la substitue dans l'autre équation.

Application :

$$\begin{cases} x + 3y = 6{,}50 \\ 2x + 5y = 11{,}75 \end{cases}$$

Le coefficient en x de la première équation vaut 1

- A partir de la première équation, on tire :

$$x + 3y - 3y = 6{,}50 - 3y$$

Soit $x = 6{,}50 - 3y$

Expression de x en fonction de y

On remplace maintenant x par 6,50 -3y dans la deuxième équation, cela donne :

$$2\times(6{,}50 - 3y) + 5y = 11{,}75$$

soit $2\times6{,}50 + 2\times(-3y) + 5y = 11{,}75$

C'est une équation à une inconnue

ou encore $13 + -6y + 5y = 11{,}75$

$$-13 + 13 - 6y + 5y = 11{,}75 - 13$$

$$-y = -1{,}25$$

d'où $y = 1{,}25$

- Remplaçons y par 1,25 dans l'expression de x en fonction de y.
  On trouve $x = 6{,}50 - 3\times1{,}25 = 6{,}50 - 3{,}75 = 2{,}75$

La solution du système est le couple (2,75 ; 1,25)

4) Application à un problème de fonction

Problème : On cherche l'expression de la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A(2 ; 5) et B(-3 ; 7)

Une telle fonction est de la forme f: x ---> ax + b et on cherche la valeur de a et de b

Comme A(2 ; 5) est un point de la représentation graphique de f, on a $f(2) = 3$. Soit 2a + b = 3

De la même façon, avec B(-3 ; 7),on a $f(-3) = 7$. Soit -3a + b = 7

On cherche donc le couple (a;b) solution du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -3a + b = 7 \end{cases}$$