Identités Remarquables

1) Carré d'une somme ou d'une différence

a) Développer ou réduire

Si a et b sont deux nombre ou expressions littérales, on a :

- Carré d'une somme

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2}$$

Exemples : $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$ l'étape intermédiaire est $(3x)^2 + 2\times3x\times5 + 5^2$

- Carré d'une différence

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\ ab + b^2}$$

Exemples : $(x + 6)^2 = x^2 - 12x + 36$

$(2x - 10)^2 = 4x^2 - 40x + 100$ l'étape intermédiaire est $(2x)^2 - 2\times2x\times10 + 10^2$

b) Factoriser

Dans certains cas, on peut utiliser cette identité remarquable pour factoriser une expression

Par exemple :

- $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2\times x\times4 + 4^2 = (x - 4)^2$
- $64x^2 + 80x + 25 = (8x)^2 + 2\times8x\times5 + 5^2 = (8x + 5)^2$

En revanche, dans $x^2 + 8x + 64$ on ne voit pas apparaître d'identité remarquable :

$x^2 + 8x + 64 = x^2 + \ x\times8 + 8^2$

2) Différence de deux carrés

Si a et b sont deux nombre ou expressions littérales, on a :

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Cette identité remarquable permet de développer des expressions :

$(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$

Elle permet surtout de factoriser des expressions :

$25 - (2x + 7)^2 = [5 +(2x + 7)][5 - (2x + 7)] = [5 + 2x + 7][5 - 2x - 7)] = (2x + 12)(-2x -2)$

3) Applications au calcul mental

- Pour calculer 1004^2 , on calcule $(1000 + 4)^2 = 1000^2 +2\times1000\times4 + 4^2$
  d'où $1004^2 = 1\ 008\ 016$.
- Pour calculer 103×97, on calcule $(100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2$
  d'où $103\times97 = 9\ 991$

4) Une équation particulière

On souhaite résoudre l'équation $x^2 = a$
Si a est négatif, elle n'a pas de solution car un carré est toujours positif.

Propriété :
Si a est positif, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est $\{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\}$.

Preuve :
L'équation $x^2 = a$ équivaut à $x^2 - a = 0$.
Comme a est positif, $a = (\sqrt{a})^2$.
Notre équation équivaut à $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$; on a utiliser la factorisation de la somme de deux carrés.
On doit résoudre une équation produit nulle, elle est nulle si l'un au moins des facteurs est nul, donc si $x + \sqrt{a} = 0$ ou si $x - \sqrt{a} = 0$
soit si $x = -\sqrt{a}$ ou si $x = \sqrt{a}$. C'est ce qu'il fallait démontrer. (CQFD)