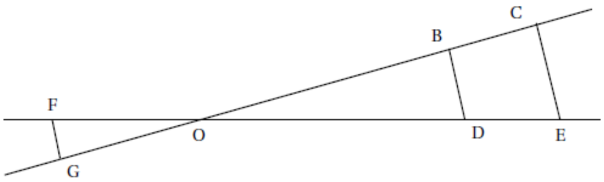
Fiche brevet : le théorème de Thalès et sa réciproque

Exercice 1 : *sujet Amérique du nord juin 2009*

Les longueurs sont données en centimètres.

On sait que les droites (BD) et (CE) sont parallèles. On donne OB = 7,2 ; OC = 10,8 ; OD = 6 et CE = 5,1.

On ne demande pas de faire une figure en vraie grandeur.



1) Calculer OE puis BD.

Les droites (BC) et (DE) sont sécantes en O et les droites (BD) et (CE) sont parallèles; on peut donc utiliser le théorème de Thalès et on a les égalités : $\frac{OB}{OC}=\frac{OD}{OE}=\frac{BD}{CE}$

Avec les valeurs numériques, cela donne : $\frac{7,2}{10,8}=\frac{6}{OE}=\frac{BD}{5,1}$

A partir de l'égalité $\frac{7,2}{10,8}=\frac{6}{OE}$ on trouve grâce à un produit en croix $OE=\frac{10,8\times 6}{7,2}$

Soit OE = 9 cm

De la même façon à partir de $\frac{7,2}{10,8}=\frac{BD}{5,1}$ on trouve BD = $\frac{7,2\times 5,1}{10,8}$ = 3,4 cm

2) On donne OG = 2,4 et OF = 2.

Démontrer que (GF) et (BD) sont parallèles.

On a $\frac{OB}{OG}=\frac{7,2}{2,4}$ = 3 et $\frac{OD}{OF}=\frac{6}{2}$ = 3

Comme les points F,O,D et G,O,B sont alignés dans cet ordre et que $\frac{OB}{OG}=\frac{OD}{OF}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (BD) et (GF) sont parallèles.

Exercice 2 : *sujet centres étrangers juin 2009*

Dans cet exercice toutes les dimensions sont données en cm.

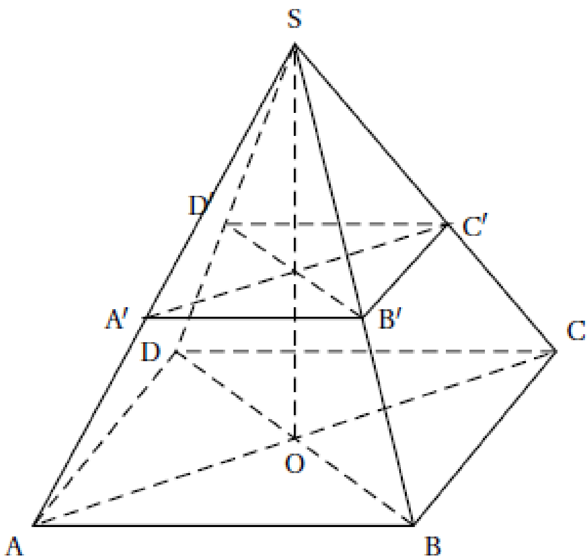
La pyramide SABCD ci-contre est telle que :

– la base ABCD est un carré de centre O tel que AC = 12.

– les faces latérales sont des triangles isocèles en S.

– la hauteur [SO] mesure 8.

(la figure n'est pas aux dimensions réelles)



1) Dans le triangle SOA rectangle en O, montrer que SA = 10.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle SOA rectangle en O :

$SA^2 = SO^2 + OA^2$

soit $SA^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

d'où SA = 10 cm

2) Sachant que AB = $6\sqrt{2}$,montrer que l'aire du carré ABCD est 72 cm².

L'aire d'un carré est donné par la formule côté²; l'aire du carré ABCD est donc

$(6\sqrt{2})^2 = 6^2\sqrt{2}^2 = 36\times 2 = 72$ cm²

3) Montrer que le volume de la pyramide SABCD est égal à 192 cm³.

Le volume d'un pyramide est $\frac{1}{3}$ × Aire de la base × Hauteur ; donc celui de la pyramide SABCD est égal à $\frac{1}{3}$ × 72cm² × 8cm = 192 cm³

4) Soient A′ un point de [SA] et B′ un point de [SB] tels que SA′ = SB′ = 3.
Montrer que (AB) et (A′B′) sont parallèles.

Les points S,A,A' et S,B,B' sont alignés dans cet ordre et $\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{3}{10}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

5) La pyramide SA′B′C′D′ est une réduction de la pyramide SABCD, calculer le coefficient de réduction.

Ce coefficient a été rencontré à la question 4) et c'est $\boxed{\frac{3}{10}}$

6) Calculer le volume de la pyramide SA′B′C′D′.
Le volume de la pyramide réduite est le produit du volume de la pyramide d'origine par le coefficient de réduction au cube

$\left(\frac{3}{10}\right)^3 \times 192\,cm^3$ = 5,184 cm ³