Travail de recherche : autour de $\sqrt{2}$

Exercice 1 : Une approximation

L'algorithme de Héron permet de calculer une approximation de $\sqrt{2}$

On pose la première valeur $V_1=1$.

On calcule la deuxième valeur $V_2=\frac{V_1+\frac{2}{V_1}}{2}$ puis la troisième

$V_3=\frac{V_2+\frac{2}{V_2}}{2}$ et ainsi de suite ...

	A	B	C
1	Numéro de la valeur	Valeur	Carré de la Valeur
2	1	1	1
3	2	1,5	2,25
4	3		
5	4		

1) Utilisez un tableur pour compléter la feuille de calcul ci-contre. Précisez la formule à entrer dans les cases B4 et C4

Il faut entre en B4 la formule « =(B3+2/B3)/2 » et en C4 : « =B4^2 »

2) Étendez la formule jusqu'à obtenir toujours la même valeur. (Pour obtenir la précision maximale, sélectionnez les cellules puis utilisez Format Cellule / Nombres). Précisez cette valeur et son numéro.

Il est à noter que l'on obtient pas le même résultat avec le tableur de OpenOffice (oOo) et celui de Microsoft. Avec oOo, on trouve :

Numéro de la valeur	Valeur	Carré de la Valeur
1	1	1
2	1,5	2,25
3	1,41666666666667000000	2,00694444444444000000
4	1,41421568627451000000	2,00000600730488000000
5	1,41421356237469000000	2,00000000000451000000
6	1,41421356237310000000	2,00000000000000000000
7	1,41421356237310000000	2,00000000000000000000
8	1,41421356237310000000	2,00000000000000000000

On constate que la valeur cherchée est 1,4142135623731 et qu'elle est obtenue à partir de la valeur numéro 6.

3) Démontez que cette valeur n'est pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$. Pour cela, vérifiez que son carré n'est pas égal à 2 en étudiant le dernier chiffre non nul de sa partie décimale

Le dernier chiffre non nul de sa partie décimale de 1,414 213 562 373 1 est le treizième chiffe après la virgule et c'est un 1. Si l'on calcule $1{,}4142135623731^2$ = 1,414 213 562 373 1 × 1,414 213 562 373 1 on trouve que le vingt-sixième chiffre après la virgule est un 1 (trouvé en faisant 1 × 1), comme il est différent de 0; $1{,}4142135623731^2$ ne peut être égal à 2 et donc 1,4142135623731 n'est pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$.

PS : Comme il arrondis les calculs, le tableur propose une autre réponse (en jaune).

Exercice 2 : Irrationalité

Supposons que $\sqrt{2}$ s'écrive sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs non nuls.

1.a) Vérifiez que $p^2=2q^2$.

$\frac{p}{q}=\sqrt{2}$; cette égalité est équivalente à $p=\sqrt{2}q$ et donc $p^2 = \sqrt{2}q\times\sqrt{2}q = 2q^2$

b) Déduisez-en que p^2 est pair.

Comme $p^2=2\times q^2$, p^2 est donc un multiple de 2, il est donc pair

2.a) Démontrez que si p est pair, alors p^2 est pair et que si p est impair, alors p^2 est impair.

- Si p est pair, il s'écrit par exemple $2\times p'$ on a alors $p^2 = (2\times p')^2 = 4\times p'^2 = 2\times(2p'^2)$. p^2 est donc pair car c'est un multiple de 2.

- Si p est impair, il s'écrit par exemple $2p' + 1$ on a alors $p^2 = (2p' + 1)^2 = (2p')^2 + 2\times 2p'\times 1 + 1^2 = 4p'^2 + 4p' + 1$. p'^2 s'écrit $2\times(2p'^2 + 2p') + 1$ c'est donc un nombre impair.

b) Déduisez-en que p est pair.
p est soit pair, soit impair.
Si p est impair, on a vu que p^2 l'est aussi mais c'est impossible car on a montré au 1 que p^2 était pair !
Conclusion p est pair.

3. Puisque p est pair, posons p=2p'
a) Démontrez alors que $q^2=2p'^2$
Si on note p par 2p' alors l'égalité $p^2=2q^2$ devient alors $4p'^2=2q^2$ et après simplification par 2, on obtient $q^2=2p'^2$.

b) Déduisez-en, à l'aide des questions précédentes que q est pair.
De la question précédente, on déduit que q^2 est pair. On déduit de ce qui a été vu à la question 2 que q est pair.

4. Pourquoi les réponses des questions 2 et 3 sont-elles contradictoires avec l'hypothèse?
On a supposé que $\sqrt{2}$ pouvait s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$. Mais sous cette hypothèse, on a montré que p et q étaient pairs; cela contredit le fait que $\frac{p}{q}$ soit une fraction irréductible.

Déduisez-en que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
L'hypothèse n'est donc pas réalisable, $\sqrt{2}$ ne peut donc pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

<u>Exercice 3 : Une construction géométrique</u>
On suppose donné un segment de longueur 1dm.
En utilisant la règle (non graduée) et le compas, construire un carré de surface $2dm^2$.Détaillez la construction effectuée.

Comme le raisonnement reste valable indépendamment de l'unité, la proposition de résolution ne tient pas compte des unités.

On cherche à construire un carré de surface 2; son côté est donc $\sqrt{2}$. Or, dans un triangle rectangle isocèle de côté 1, le carré de la longueur de l'hypoténuse est 2 et la longueur de l'hypoténuse est $\sqrt{2}$.La diagonale d'un carré de côté 1 est donc $\sqrt{2}$.
Il suffit donc de construire un carré de côté 1 puis un autre de côté sa diagonale.
Pour construire l'angle droit, avec le compas, peut construire la médiatrice d'un segment (en rouge et vert sur la figure)