

L'étude porte sur certaines sommes d'exposants et notamment la résolution du problème de l'échiquier (question 6). Elle se conclut par la formule générale complètement hors programme.

$n$  désigne toujours un entier naturel non nul.

Avec des puissances de 10

1. a) Calculer  $10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3$   
 b) En déduire l'expression décimale de  $10^0 + 10^1 + \dots + 10^n$
2. Avec des exposants négatifs.  
 a) Calculer  $10^{-3} + 10^{-2} + 10^{-1} + 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3$   
 b) En déduire l'expression décimale de  $10^{-n} + \dots + 10^{-1} + 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3$

Un peu de calcul fractionnaire

3. a) Calculer  $(\frac{1}{3})^1 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4 + (\frac{1}{3})^5$  et donner le résultat sous forme fractionnaire.  
 b) Après avoir réduit la fraction au même dénominateur, observer la somme des numérateurs, et justifier sans calculs que la fraction somme sera irréductible.

En utilisant le tableur

4. a) A l'aide d'un tableur (Excel ou Open Office Calcul) réaliser le tableau ci-contre. Reporter le sur la copie à la fin de la partie 4.  
 b) Quelles sont les formules à entrer dans les cases B4 et C4 ?  
 c) En étendre la formule pour répondre aux questions suivantes :  
 i. À partir de quelle valeur de  $n$ ,  $5^n$  est-il supérieur à un milliard ?  
 ii. À partir de quelle valeur de  $n$ , la somme  $5^0 + 5^1 + \dots + 5^n$  est-elle supérieure à un milliard ? À  $10^{18}$  (un milliard de milliard) ?  
 d) À partir de quel exposant vous semble-t-il que le tableur passe au calcul approché ? Justifier la réponse.

	A	B	C
1	Puissances de 5		
2	Exposant	Valeur	Somme
3	0	1	1
4	1	5	6
5	2	25	31
6	3	125	156
7	4	625	781
8	5	3125	3906

Calculs exacts

5. On note  $S = 13^0 + 13^1 + \dots + 13^{27}$ . Comme on cherche à calculer la somme d'exposants de 13, donner une expression de  $13 \times S$  utilisant uniquement des puissances de 13. De la même façon, donner une expression simple de  $13S - S$  (elle ne doit contenir que deux termes).  
 En déduire une expression simple de  $S$  (utiliser une propriété de calcul littéral et un quotient adéquat).
6. En utilisant la même méthode qu'à la question 5, calculer le nombre de grains de blé nécessaire pour poser sur un échiquier; 1 grain sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, 8 sur la suivante et ainsi de suite sur tout l'échiquier.

La formule générale

7.  $n$  est toujours un entier relatif et  $a$  est un nombre quelconque différent de 1. En utilisant la même méthode qu'à la question 5, donner une expression simple de  $a^0 + a^1 + \dots + a^n$ .

Travail supplémentaire : Démontrer que la formule pour calculer

l'aire d'un trapèze est :  $\frac{(B+b)}{2} \times h$

Où  $B$  et  $b$  désignent respectivement la longueur de la grande base et de la petite et  $h$  la longueur de la hauteur correspondante.

